

1 Croissance et fonctions

1.1 Le discret et le continu

Les suites, et donc le calcul du capital soumis à un taux d'intérêt, sont calculés « par pas », c-à-d que l'on ne peut rien dire entre deux valeurs. Les suites sont des calculs discontinus. En mathématique, on utilise le terme « discret » pour désigner ce type de calcul par pas.

Les fonctions continues, par définition, permettent de calculer dans des intervalles donnés une valeur de sortie ($f(x)$) pour n'importe quelle valeur d'entrée (x). Le calcul continu peut être vu comme la généralisation du calcul discret.

1.2 L'inversion des fonctions

On peut pour toute fonction continue $f(x)$ trouver une fonction $g(x)$ qui permettra de revenir à la valeur de x .

$$x = g(f(x))$$

On appellera ce type de suite des fonctions inverses.

Par exemple, voici quelques fonctions inverses :

- pour $f(x) = a.x + b$, on peut définir la fonction inverse $g(x) = \frac{x-b}{a}$;
- pour $f(x) = x^2$, on peut définir la fonction inverse $g(x) = \sqrt{x}$;
- pour $f(x) = x^3$, on peut définir la fonction inverse $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

En terme de représentation géométrique, l'inversion d'une fonction sera représentée par une transposition (rotation et retournement) des x et $f(x)$.

2 Croissance linéaire

2.1 Définition

La fonction linéaire (ou affine) définit la croissance linéaire. La définition la plus générique de la fonction linéaire est :

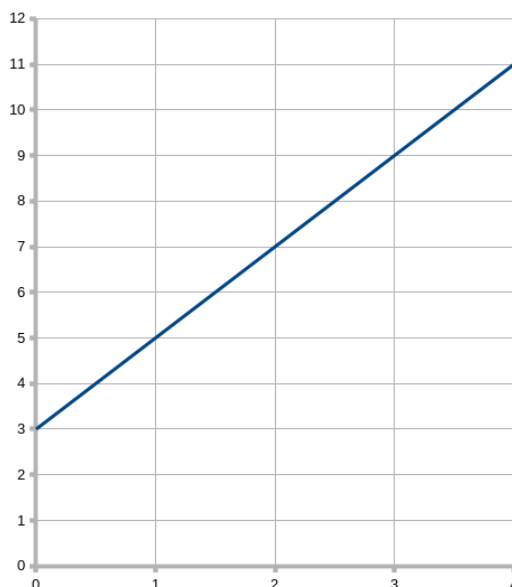
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = a.x + b$$

2.2 Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite ou un segment de droite.

2.3 Homologie avec les suites arithmétiques

On peut observer que la fonction $f(x) = a.x + b$ est une généralisation dans un cadre continu d'une suite arithmétique, où la raison vaut a et le terme initial vaut b .

FIGURE 1 – Représentation graphique de $f(x) = 2x + 3$.

3 Croissance du second degré

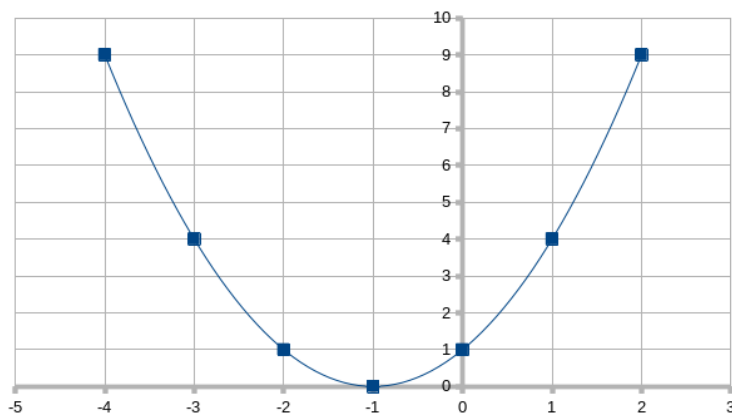
3.1 Définition

La fonction du second degré définit la croissance du second degré. La définition la plus générique de la fonction du second degré est :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

3.2 Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction du second est une parabole.

FIGURE 2 – Représentation graphique de $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

4 Croissance du troisième degré

4.1 Définition

La fonction du troisième degré définit la croissance du troisième degré. La définition la plus générale de la fonction du troisième degré est :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$$

4.2 Représentation graphique

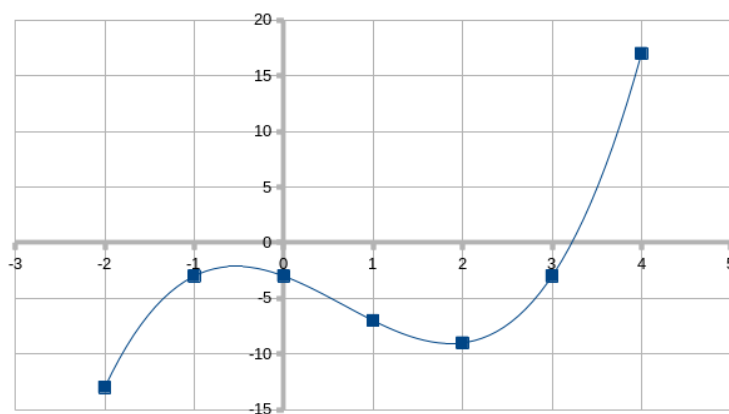


FIGURE 3 – Représentation graphique de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 3$.

5 Croissance exponentielle

5.1 Définition

Une croissance exponentielle est définie par une fonction exponentielle.

La définition de la fonction exponentielle est reprise ci-dessous :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = a^x$$

x	2^x	10^x
0	$2^0 = 1$	$10^0 = 1$
1	$2^1 = 2$	$10^1 = 10$
2	$2^2 = 4$	$10^2 = 100$
3	$2^3 = 8$	$10^3 = 1000$
4	$2^4 = 16$	$10^4 = 10000$

5.2 Représentation graphique

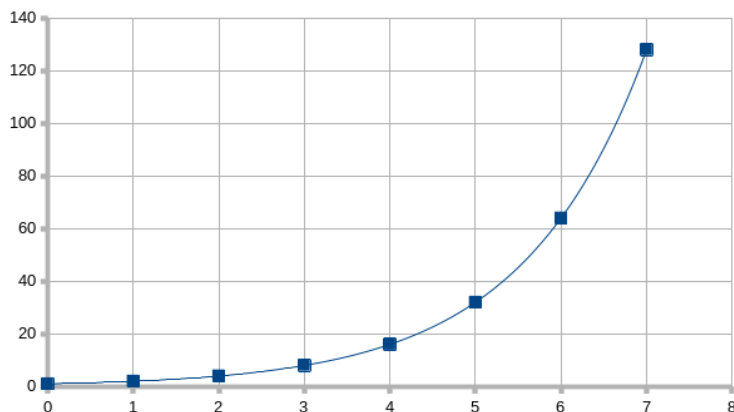


FIGURE 4 – Représentation graphique de $f(x) = 2^x$.

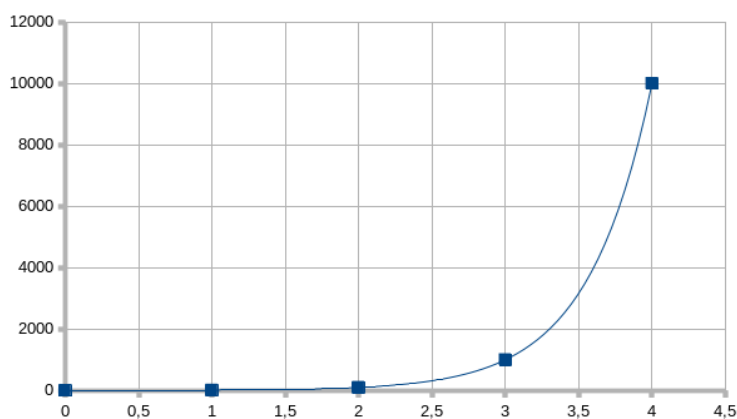


FIGURE 5 – Représentation graphique de $f(x) = 10^x$.

5.3 Homologie avec les suites géométriques

On peut observer que la fonction $f(x) = a^x$ est une généralisation dans un cadre continu d'une suite géométrique, où la raison vaut a .

5.4 Exemples

5.4.1 Croissance bactérienne

Une bactérie, tel que *Escherichia coli* dans des conditions idéales double sa population toutes les 20 minutes.

A partir d'une seule bactérie, après 4 heures, on peut donc atteindre **4096 bactéries**.

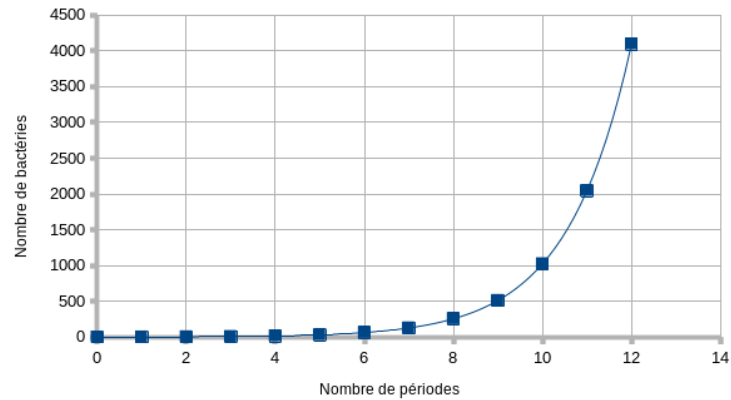


FIGURE 6 – Évolution d'une population de bactéries (en valeurs décimales).

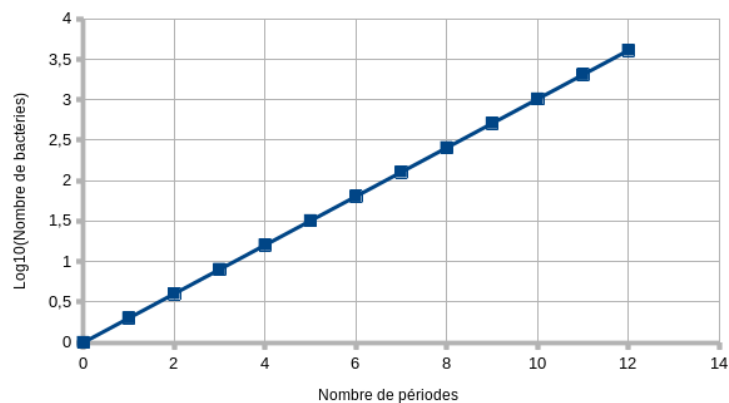


FIGURE 7 – Évolution d'une population de bactéries(en valeurs logarithmiques).

5.4.2 Réaction nucléaire

Si on suppose que chaque neutron nucléaire libère 3 neutrons par choc nucléaire, on peut calculer après 6 demi-vies (et donc 6 chocs) que 729 neutrons seront émis.

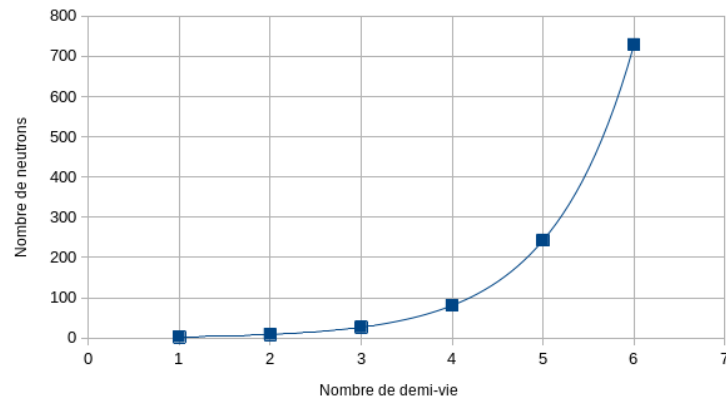


FIGURE 8 – Évolution du nombre de neutrons émis(en valeurs décimales).

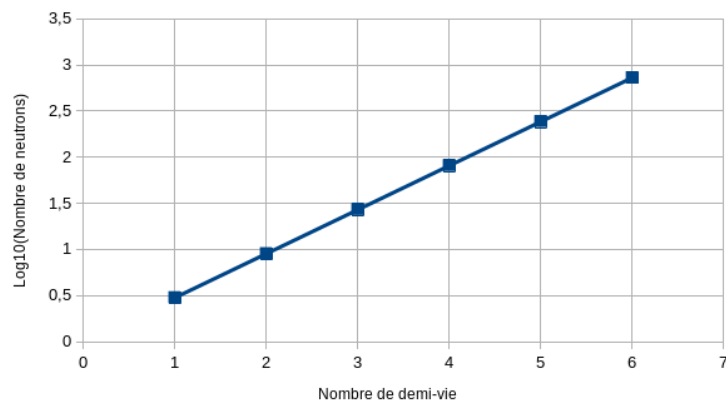


FIGURE 9 – Évolution du nombre de neutrons émis(en valeurs logarithmiques).

6 Croissance logarithmique

Une croissance logarithmique est définie par une fonction logarithmique. La fonction logarithmique est la fonction inverse de la fonction exponentielle.

6.1 Définition

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \log_a(x)$$

6.2 Représentation graphique

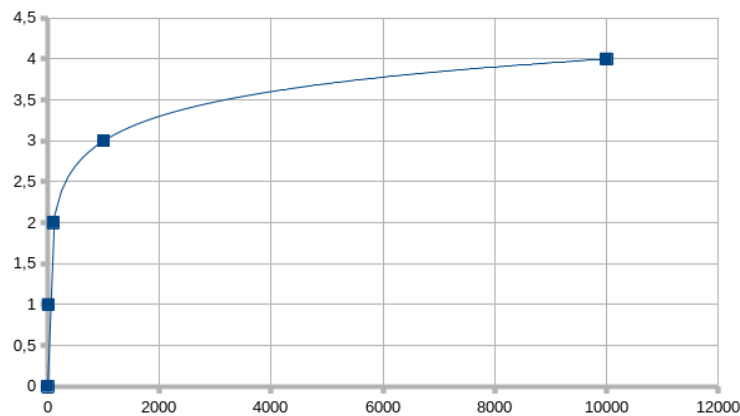


FIGURE 10 – Représentation graphique de $f(x) = \log_{10}(x)$ en valeurs décimales.

6.3 Exemples

6.3.1 Le pH

Le pH est calculé sur base de la formule :

$$pH = -\log_{10}(H^+)$$

Il est donc directement fixé par la concentration en ion Hydrogène (H^+).

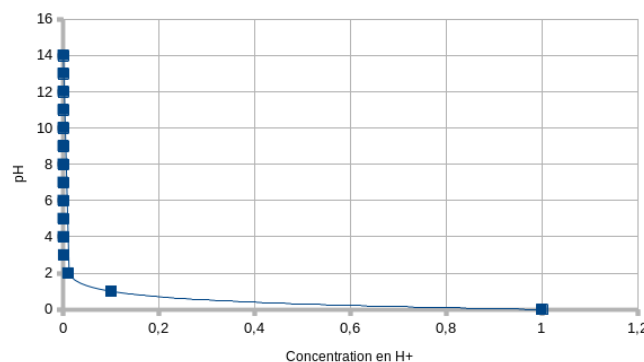
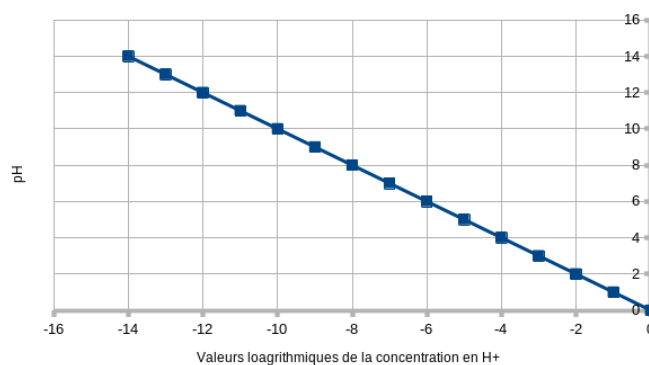


FIGURE 11 – Représentation graphique du pH n fonction de la concentration en H^+ .

FIGURE 12 – Représentation graphique du pH n fonction du logarithme de la concentration en H^+ .

6.3.2 Le décibel

Le décibel (dB) est calculé sur base de la formule :

$$dB = 10 \times \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où :

- I est l'intensité sonore en Watt/m²;
- I_0 est l'intensité sonore de référence qui vaut 10^{-12} en Watt/m²;

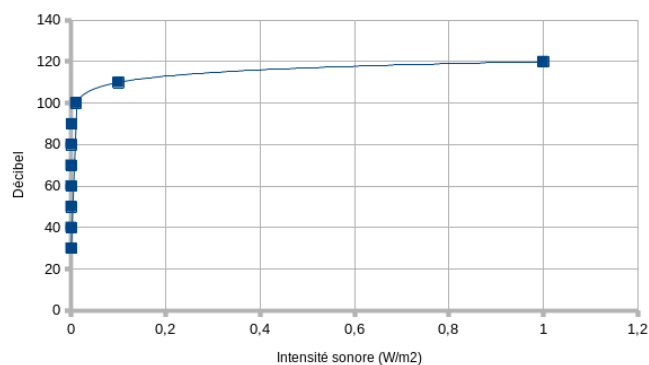


FIGURE 13 – Décibels en fonction de l'intensité sonore(en valeurs décimales).

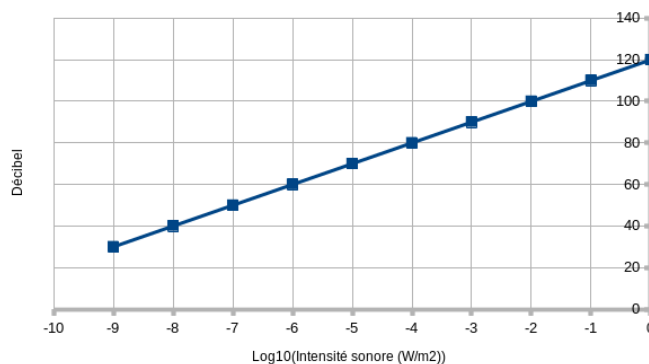


FIGURE 14 – Décibels en fonction du logarithme de l'intensité sonore.

Table des matières

1	Croissance et fonctions	1
1.1	Le discret et le continu	1
1.2	L'inversion des fonctions	1
2	Croissance linéaire	1
2.1	Définition	1
2.2	Représentation graphique	1
2.3	Homologie avec les suites arithmétiques	1
3	Croissance du second degré	2
3.1	Définition	2
3.2	Représentation graphique	2
4	Croissance du troisième degré	3
4.1	Définition	3
4.2	Représentation graphique	3
5	Croissance exponentielle	4
5.1	Définition	4
5.2	Représentation graphique	4
5.3	Homologie avec les suites géométriques	4
5.4	Exemples	5
5.4.1	Croissance bactérienne	5
5.4.2	Réaction nucléaire	6
6	Croissance logarithmique	7
6.1	Définition	7
6.2	Représentation graphique	7
6.3	Exemples	7
6.3.1	Le pH	7
6.3.2	Le décibel	8