

1 Définitions

1.1 Capital

Le **capital** (C) est le montant placé ou emprunté.

Dans le cadre d'un crédit, l'**amortissement** (A) est la part de capital remboursé à chaque période.

1.2 Intérêt

L'**intérêt** est le prix de « location » du capital. C'est le montant supplémentaire au capital qui devra être remboursé par l'emprunteur.

Il est exprimé sous de forme de **taux d'intérêt** (t) qui est le rapport entre le montant de l'intérêt et le capital initial.

$$t = \frac{I}{C_0}$$

1.3 Périodicité

La périodicité est généralement le mois ou l'année. La durée correspond au nombre de période du placement ou du crédit. Le montant payé pour le remboursement d'un crédit quelque soit la périodicité sera noté M .

Ce montant vaut l'addition de l'amortissement et de l'intérêt.

$$M = A + I$$

1.3.1 Mensualité

Le taux d'intérêt mensuel sera noté t_m . Le montant d'un remboursement mensuel est appelé **mensualité**.

1.3.2 Annuité

Le taux d'intérêt annuel sera noté t_a . Le montant d'un remboursement annuel est appelé **annuité**.

2 Taux d'intérêt simple

Dans le cadre d'un intérêt simple, le montant de l'intérêt n'est pas réinjecté dans le capital.

Il peut par exemple s'agir d'un placement à taux fixe dont le montant de l'intérêt serait systématiquement récupéré par l'épargnant tous les ans.

Placement fixe à taux d'intérêt simple Soit un capital initial de 5000 € placé pendant 5 ans à un taux annuel de 5%.

— $C_0 = 5000$ €

— $t_a = 5$ %

Dans ce contexte, l'épargnant percevra tous les ans 250 € d'intérêt.

3 Taux d'intérêt composé

Dans le cadre d'un intérêt composé, le montant de l'intérêt est réinjecté à chaque période dans le capital.

C'est le système utilisé par les banques pour le placement ou le crédit.

3.1 Placement bloqué à taux fixe

Soit un capital initial de 5000 € placé pendant 5 ans à un taux annuel de 5%.

— $C_0 = 5000$ €

— $t_a = 5$ %

Période	Capital	Intérêt
0	5.000,00 €	250,00 €
1	5.250,00 €	262,50 €
2	5.512,50 €	275,63 €
3	5.788,13 €	289,41 €
4	6.077,53 €	303,88 €
	6.381,41 €	

TABLE 1 – Exemple de placement à taux fixe

Homologie avec les suites Dans l'exemple donné, il apparaît de façon claire que l'évolution du capital est une suite géométrique.

Pour rappel, une suite géométrique est de forme :

$$u_{n+1} = u_n \times r$$

Dans le cas du capital, la suite géométrique est donc :

$$C_{n+1} = C_n \times (1 + t)$$

On peut donc appliquer les formules des suites géométriques pour le calcul du capital pour toutes périodes.

3.2 Crédit à amortissement constant

Dans un crédit à amortissement constant, la mensualité n'est pas fixe puisque l'intérêt décroît avec le temps.

$$A = \frac{C_0}{p}$$

où :

- A est l'amortissement
- C_0 est le capital initial
- p est le nombre de mois

Soit un crédit de 1800 € remboursable sur un an (12 mois) à un taux mensuel de 1%.

L'amortissement calculé sera de 150 €.

Mois	Capital	Intérêt	Mensualité
0	1.800,00 €	18,00 €	168,00 €
1	1.650,00 €	16,50 €	166,50 €
2	1.500,00 €	15,00 €	165,00 €
3	1.350,00 €	13,50 €	163,50 €
4	1.200,00 €	12,00 €	162,00 €
5	1.050,00 €	10,50 €	160,50 €
6	900,00 €	9,00 €	159,00 €
7	750,00 €	7,50 €	157,50 €
8	600,00 €	6,00 €	156,00 €
9	450,00 €	4,50 €	154,50 €
10	300,00 €	3,00 €	153,00 €
11	150,00 €	1,50 €	151,50 €

TABLE 2 – Exemple de crédit à amortissement constant

Homologie avec les suites Dans l'exemple donné, il apparaît de façon claire que l'évolution du capital est une suite arithmétique.

Pour rappel, une suite arithmétique est de forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Dans le cas du capital, la suite arithmétique est donc :

$$C_{n+1} = C_n + (-A)$$

On peut donc appliquer les formules des suites arithmétiques pour le calcul du capital pour toutes périodes.

3.3 Crédit à mensualité constante

Dans un crédit à mensualité constante, les intérêts décroissent avec le temps. Par contre, le montant des amortissements croît avec le temps.

Le montant des mensualités est déterminé par la formule suivante :

$$M = \frac{C_0 \times t_m}{1 - (1 + t_m)^{-p}}$$

où :

- M est la mensualité
- C_0 est le capital initial
- t_m est le taux mensuel
- p est le nombre de mois

Soit un crédit de 1800 € remboursable sur un an (12 mois) à un taux mensuel de 1%.

La mensualité calculée sera de 159,93 €.

Mois	Capital	Intérêt	Amortissement
0	1.800,00 €	18,00 €	141,93 €
1	1.658,07 €	16,58 €	143,35 €
2	1.514,73 €	15,15 €	144,78 €
3	1.369,94 €	13,70 €	146,23 €
4	1.223,72 €	12,24 €	147,69 €
5	1.076,03 €	10,76 €	149,17 €
6	926,86 €	9,27 €	150,66 €
7	776,20 €	7,76 €	152,17 €
8	624,03 €	6,24 €	153,69 €
9	470,35 €	4,70 €	155,22 €
10	315,12 €	3,15 €	156,78 €
11	158,34 €	1,58 €	158,34 €

TABLE 3 – Exemple de crédit à mensualité constante

Table des matières

1	Définitions	1
1.1	Capital	1
1.2	Intérêt	1
1.3	Périodicité	1
1.3.1	Mensualité	1
1.3.2	Annuité	1
2	Taux d'intérêt simple	1
3	Taux d'intérêt composé	2
3.1	Placement bloqué à taux fixe	2
3.2	Crédit à amortissement constant	2
3.3	Crédit à mensualité constante	4