

1 Concepts généraux

1.1 Notion de probabilité

La probabilité est la science du hasard, plus précisément, un hasard « des grands nombres ».

Les probabilités ne peuvent pas prédire des événements ponctuels qui se produisent de façon inopinées. Il faut obligatoirement que les événements prédits surviennent de nombreuses fois pour que des règles de probabilités puissent être établies. Les probabilités sont donc très liés aux statistiques (cfr 4).

1.2 Rappels sur les ensembles

La théorie des ensembles permet de mieux comprendre la notion de (in)dépendance des événements. Un ensemble est un ensemble d'éléments. Il peut s'agir de nombres, d'événements, de classes, de catégories,

1.2.1 Ensembles indépendants

Deux ensembles sont indépendants si ils n'ont pas d'éléments communs.

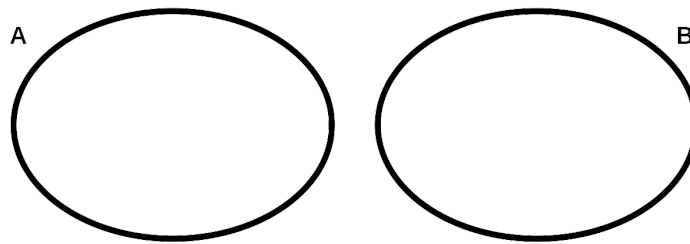


FIGURE 1 – Deux ensembles indépendants.

On peut alors observer que dans cette situation le nombre total d'éléments des deux ensembles vaut la somme des éléments de chaque ensemble.

On définit l'union ($\cup$) de deux ensembles comme l'ensemble regroupant les deux ensembles.

Dans le cas de deux ensembles indépendants A et B , l'union des deux ensembles correspond à la somme des deux ensemble.

$$A \cup B = A + B$$

On définit l'intersection ($\cap$) de deux ensembles comme l'ensemble regroupant les éléments communs des deux ensembles.

Dans le cas de deux ensembles indépendants A et B , l'intersection des deux ensembles est l'ensemble vide ($\emptyset$).

$$A \cap B = \emptyset$$

1.2.2 Ensembles liés

Par contre, deux ensembles seront liés, s'ils ont des éléments communs. Ces éléments communs (intersection) doivent donc être déduit de la somme des 2 ensembles pour avoir l'union des deux ensembles.

Dans le cas de deux ensembles liés A et B ,

$$A \cup B = A + B - (A \cap B)$$

et donc

$$A \cap B = A + B - (A \cup B)$$

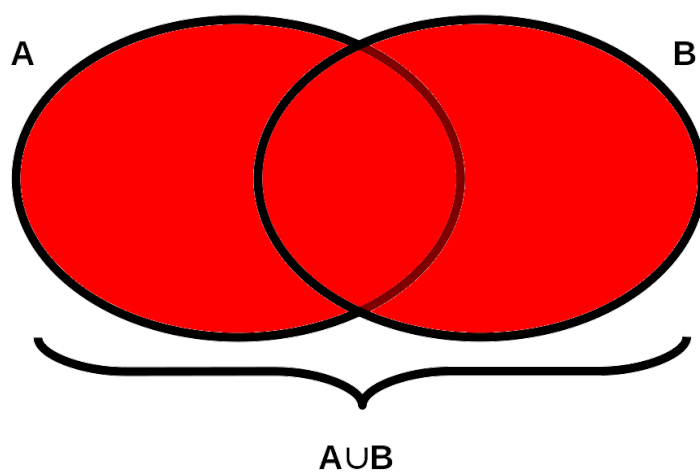


FIGURE 2 – L'union de deux ensembles liés.

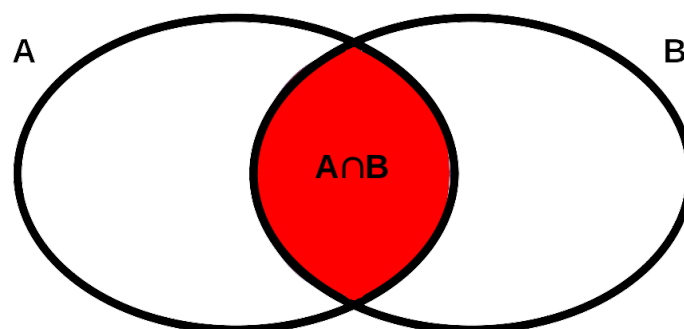


FIGURE 3 – L'intersection de deux ensembles liés.

1.3 Notion d'opération et d'évènement

Les probabilités utilisent la notion de **évènement**. Un évènement est la conséquence d'une opération.

Une **opération** est une action qui produira un évènement. Il peut s'agir :

- du lancer d'un dé ;
- du tirage de cartes ou de boules,
- mais aussi dans le domaine scientifique :
 - de l'observation météorologique ;
 - de la mesure de tous paramètres physiques (température, pression, ...), chimiques (concentrations, pH, ...) ou biologiques (présence de gènes, caractéristiques d'individus, ...)
 - dans les sciences sociales, le comportement ou les caractéristiques d'individus.

L'exemple le plus simple est l'opération de « lancer de dé » qui peut produire 6 évènements distincts (les 6 faces du dé).

De façon générale, la probabilité d'un évènement A est définie comme le rapport entre le nombre d'occurrence de l'évènement A (noté $\#A$ sur le total d'évènements possibles (noté $\#\Omega$)).¹

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

La probabilité est donc toujours un nombre entre 0 et 1. Elle est souvent exprimée en pourcent(%).

Exemple La probabilité d'avoir un nombre divisible par 3 lors du lancer d'un dé vaut $P(/3) = \frac{2}{6} = 33\%$.

1.3.1 L'évènement certain

L'évènement certain est l'évènement dont la probabilité vaut 1. Cet évènement est symbolisé par Ω (oméga majuscule).

$$P(\Omega) = 1$$

Exemple La probabilité d'avoir un nombre entre 1 et 6 lors du lancer d'un dé vaut $P(1..6) = \frac{6}{6} = 100\%$.

1.3.2 L'évènement impossible

L'évènement impossible est l'évènement dont la probabilité vaut 0. Cet évènement est symbolisé par l'ensemble vide ($\emptyset$).

$$P(\emptyset) = 0$$

Exemple La probabilité d'avoir un 7 lors du lancer d'un dé vaut $P(7) = \frac{0}{6} = 0\%$.

1. Le symbole $\#$, appelé cardinal est l'opérateur qui donne le nombre d'éléments d'une liste.

1.3.3 L'évènement complémentaire

L'évènement complémentaire d'un évènement A , appelé $\text{non } A$, est tel que l'union des deux évènements ($A \cup \text{non } A$) est l'évènement certain (Ω).

Donc,

$$P(A \cap \text{non } A) = P(\Omega) - 1$$

ou

$$P(\text{non } A) = 1 - P(A)$$

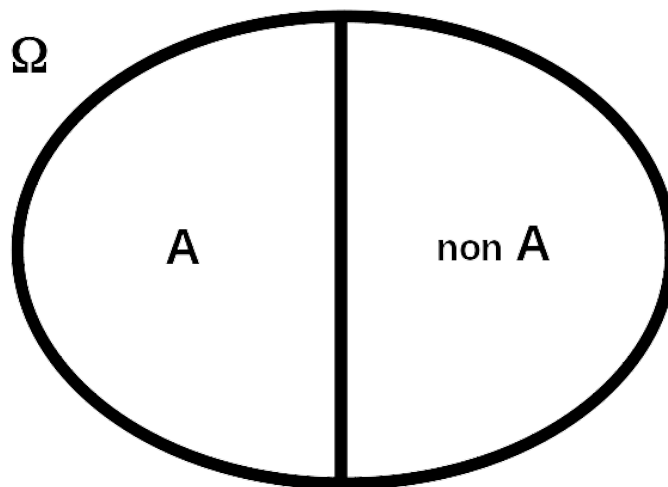


FIGURE 4 – Deux évènements complémentaire A et $\text{non } A$.

De façon incongrue, on comprend donc que les évènements A et $\text{non } A$ ne sont pas liés. En effet, il n'y a pas d'évènements communs entre A et $\text{non } A$. Le « lien » tient à l'existence de Ω . Pourtant, si A se réalise, $\text{non } A$ ne peut se réaliser. A et $\text{non } A$ sont un même et seul évènement vu de face ou de pile. Ils sont miroirs, mais non-conditionnés puisqu'ils sont indépendants.

Exemple Lors du lancer d'un dé, l'évènement *pair* et l'évènement *impair* sont complémentaires. Donc *impair* égale *non pair*. Donc $P(\text{impair}) = 1 - P(\text{pair}) = 50\%$.

2 Événements indépendants

Des événements indépendants sont des événements qui ne sont pas liés entre eux, c-à-d qu'il n'existe pas d'événements communs (cfr. 1.2.1).

2.1 Conjonction de deux événements indépendants : ET

La probabilité que deux événements indépendants se réalisent conjointement correspond aux produits de leur probabilité.

Soit deux événements indépendants A et B , alors :

$$P(A \cap B) = P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple Soit le lancer de deux dés, la probabilité d'avoir un 1 sur le premier dé ou un nombre pair sur le second dé est de $P(1 \text{ et pair}) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 8,33\%$.

2.2 Réalisation de l'un de deux événements indépendants : OU

La probabilité que un des deux événements indépendants se réalisent correspond à la somme de leur probabilité.

Soit deux événements indépendants A et B , alors :

$$P(A \cup B) = P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Exemple Soit le lancer d'un dé, la probabilité d'avoir un 1 ou un nombre pair est de $P(1 \text{ ou pair}) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = 66,67\%$.

3 Événements liés

3.1 Notion de dépendance

Les termes de liaison, dépendance ou conditionnalité sont intimement liés. Si des événements sont liés, la réalisation d'un des événements est dépendant de l'autre.

3.2 Réalisation d'un événement sachant la réalisation d'un événement lié : SI

Sur base de la théorie des ensembles qui a été rappelée (cfr. 1.2) et connaissant la formule générale des probabilités (cfr. 1.3), on peut comprendre que pour deux événements (A et B) liés, si B se réalisent alors l'ensemble B devient Ω et l'événement possible comprenant A est $A \cap B$.

La probabilité de l'événement A sachant que² B se réalise est donc :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple Supposons un jeu de cartes comportant 9 cartes composés de la manière suivante :

- 4 rois (cœur, carreau, trèfle et pique) ;
- 3 dames (carreau, trèfle et pique) ;
- 2 valets (cœur et pique).

Ces données sont synthétisées dans le tableau suivant : La probabilité d'avoir une dame est donc

	Roi	Dame	Valet
Cœur	1	0	1
Carreau	1	1	0
Trèfle	1	1	0
Pique	1	1	1

TABLE 1 – Répartition de 9 cartes.

de :

$$P(Dame) = \frac{3}{9} = 33\%$$

Mais la probabilité d'avoir une dame sachant que la couleur est trèfle est de :

$$P(Dame|Trèfle) = \frac{1/9}{2/9} = 50\%$$

2. « sachant que » ou « si » est symbolisé par une barre verticale ($|$).

4 Probabilité et statistiques

Les probabilités et les statistiques sont des domaines intimement liés. En simplifiant, on peut dire que les statistiques tentent de décrire des données, tandis que les probabilités tentent de prédire les données.

Les deux domaines vont donc parfois utiliser les mêmes formules. Ce qui différencie fondamentalement est l'interprétation qui sera donnée aux nombres.

On peut donc ré-utiliser les formules des statistiques pour estimer une probabilité.

4.1 Fréquence : la probabilité d'un évènement

Nous avons vu en cinquième que la fréquence correspond à l'occurrence d'un échantillon ou d'une population pour une valeur numérique, une classe ou une catégorie.

$$freq(A) = \frac{n_A}{n}$$

Cette définition correspond bien à la définition de la probabilité où l'on fait correspondre la classe de donnée à l'évènement.

4.2 Moyenne et espérance : la valeur attendue

En statistique, la **moyenne** ($\bar{x}$) est définie comme la somme des valeurs de x divisé par le nombre de l'échantillon (n).

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

En probabilité, l'espérance ($E(x)$) est la valeur la plus probable. On utilise aussi le terme de **valeur attendue**.

$$E(x) = \frac{\sum x}{n}$$

On observe bien que les formules sont strictement équivalentes. La différence est juste l'interprétation de la valeur calculée.

Dans le cadre des statistiques, il s'agit de mettre en évidence la « tendance » des données dans un mode purement descriptif.

Dans le cadre des probabilités, il s'agit de pouvoir prédire la valeur de l'échantillon $n + 1$ (la valeur suivante).

4.3 Écart-type et intervalle de confiance

L'**écart-type** (σ) est l'indicateur de dispersion des données numériques continues.

En probabilité, l'**intervalle de confiance** est un pourcentage sur la prédiction de l'espérance.

- l'intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ correspond à un intervalle de confiance de 68% (68 % des données se trouvent dans cet intervalle en terme statistique) ;
- l'intervalle $[\bar{x} - 2.\sigma, \bar{x} + 2.\sigma]$ correspond à un intervalle de confiance de 95% (95 % des données se trouvent dans cet intervalle en terme statistique) ;
- l'intervalle $[\bar{x} - 3.\sigma, \bar{x} + 3.\sigma]$ correspond à un intervalle de confiance de 99,7% (99,7 % des données se trouvent dans cet intervalle en terme statistique).

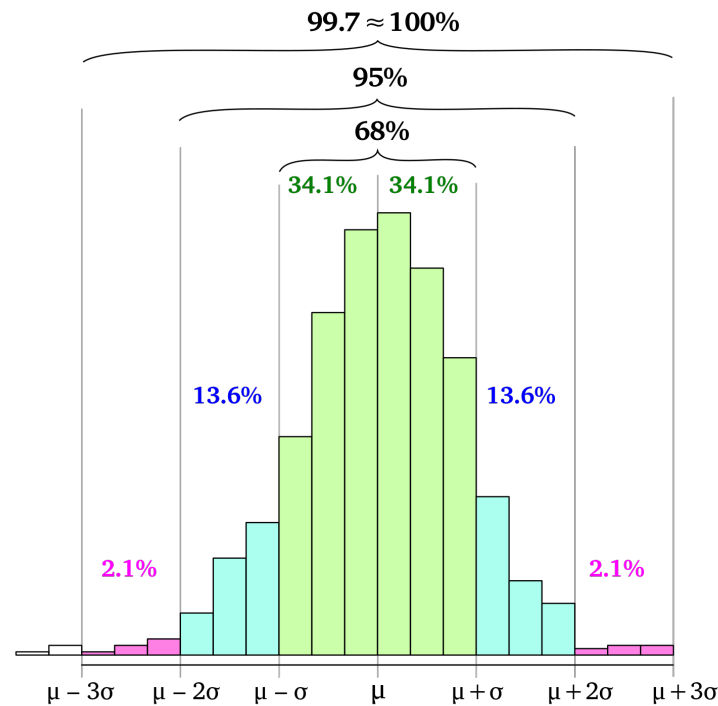


FIGURE 5 – Relation entre l'écart-type (σ) et intervalle de confiance ($\mu = \bar{x}$).

4.4 L'utilisation des probabilités par les statistiques

Cette section dépasse le contexte de ce cours. Mais, il est intéressant de savoir que les statistiques vont utiliser les probabilités pour tester la validité des données.

Par exemple, on peut utiliser les probabilités pour vérifier :

- que la taille de l'échantillon donne un intervalle de confiance suffisamment faible pour qu'il soit fiable, donc de donner une taille de l'échantillon « fiable » ;
- que l'augmentation de la taille de l'échantillon ne permettra pas de montrer plus de « certitude » ;
- que la diminution de la taille de l'échantillon permettra de conserver la même « certitude ».

Table des matières

1	Concepts généraux	1
1.1	Notion de probabilité	1
1.2	Rappels sur les ensembles	1
1.2.1	Ensembles indépendants	1
1.2.2	Ensembles liés	2
1.3	Notion d'opération et d'évènement	3
1.3.1	L'évènement certain	3
1.3.2	L'évènement impossible	3
1.3.3	L'évènement complémentaire	4
2	Événements indépendants	5
2.1	Conjonction de deux événements indépendants : ET	5
2.2	Réalisation de l'un de deux événements indépendants : OU	5
3	Événements liés	6
3.1	Notion de dépendance	6
3.2	Réalisation d'un événement sachant la réalisation d'un événement lié : SI	6
4	Probabilité et statistiques	7
4.1	Fréquence : la probabilité d'un événement	7
4.2	Moyenne et espérance : la valeur attendue	7
4.3	Écart-type et intervalle de confiance	7
4.4	L'utilisation des probabilités par les statistiques	8