1 Fonction : définition

Une **fonction** est une **transformation** numérique qui, à chaque valeur de la variable x dans un **domaine initial**, fait correspondre au plus une (0 ou 1) valeur de f(x) (appelé aussi y) dans le **domaine-image**.

Pour avoir une fonction, il faut donc avoir :
— une transformation numérique
— un domaine initial
— un domaine-image déductible de la transformation et du domaine initial.

2 Fonction : notation

Une fonction se note sous la forme du canevas suivant :

$$domaine\ initial \rightarrow domaine - image : f(x) = transformation$$

Par exemple, la fonction qui ajoute 3 entre -10 et 10 sera notée :

$$[-10, 10] \rightarrow [-7, 13] : f(x) = x + 3$$

On pourrait généraliser cette fonction à l'ensemble des réels ($\mathbb{R}$) en notant :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + 3$$

3 Fonction : représentation graphique

Lorsque on dispose d'un plan(une feuille, un tableau), on représente généralement une fonction dans un **espace orthonormé** à 2 dimensions. Un espace à 2 dimensions dispose de deux axes. Le préfixe *ortho* signifie que les axes sont *orthogonaux* (ce qui veut dire perpendiculaires). Le préfixe *normé* signifie qu'il existe un sens à ces axes (flèche) et de marque donnant l'échelle des axes.

L'abscisse correspond à l'axe des X. L'ordonnée correspond à l'axe des Y ou f(x).

Pour dessiner un graphique, la méthode la plus simple est de prendre différents points sur un domaine donné et de les rejoindre (en ligne droite ou en courbe). Le choix des points et le type de liaison dépend du type de fonction. Le calcul de deux points ne dit rien a priori sur les points intermédiaires.

Par exemple, le tracé de la fonction $[-10, 10] \rightarrow [-7, 13] : f(x) = x+3$, peut se faire avec le tableau suivant.

`x`	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
`f(x)`	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

TABLE 1 – Les valeurs de la fonction f(x)= x + 3.

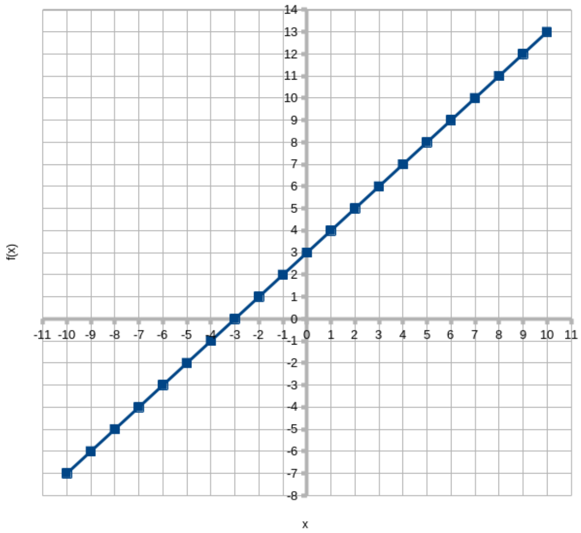

FIGURE 1 – La représentation graphique de la fonction $f(x) = x + 3$

4 Différentes fonctions caractéristiques

4.1 Fonction constante

La fonction constante est une fonction très simple qui renvoie toujours la même valeur. La valeur de x n'intervient donc pas dans la transformation.

Elle sera donc de la forme :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = b$$

où b est un réel.

Exemple On peut prendre en exemple la fonction $[-10, 10] \to [-7, 13] : f(x) = 2$. Elle prend les valeurs suivantes.

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

TABLE 2 – Les valeurs de la fonction f(x)= 2

La figure 2 donne la représentation graphique de cette fonction.

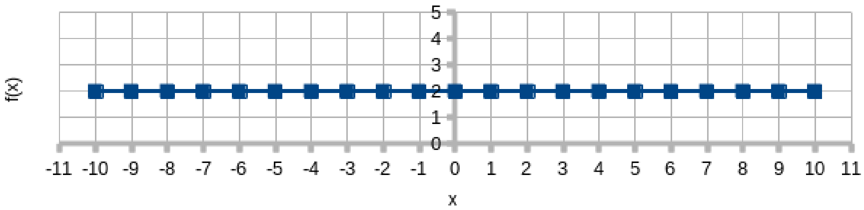

FIGURE 2 – La fonction constante $f(x) = 2$

4.2 Fonction linéaire ou affine

La fonction affine (ou linéaire [1]) est une fonction qui subit une addition et une multiplication de x.

Au sens large, la fonction linéaire est donc de la forme :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = a.x + b$$

où a et b sont des réels.

Le paramètre a est la pente de la fonction. Le paramètre b est l'ordonnée à l'origine de la fonction.

Exemple Si $a = 2$ et $b = 4$, on peut prendre en exemple la fonction $[-10, 10] \to [-7, 13] : f(x) = 2.x + 4$. Elle prend les valeurs suivantes.

x	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

TABLE 3 – Les valeurs de la fonction f(x)= 2.x + 4.

La figure 3 donne la représentation graphique de cette fonction.

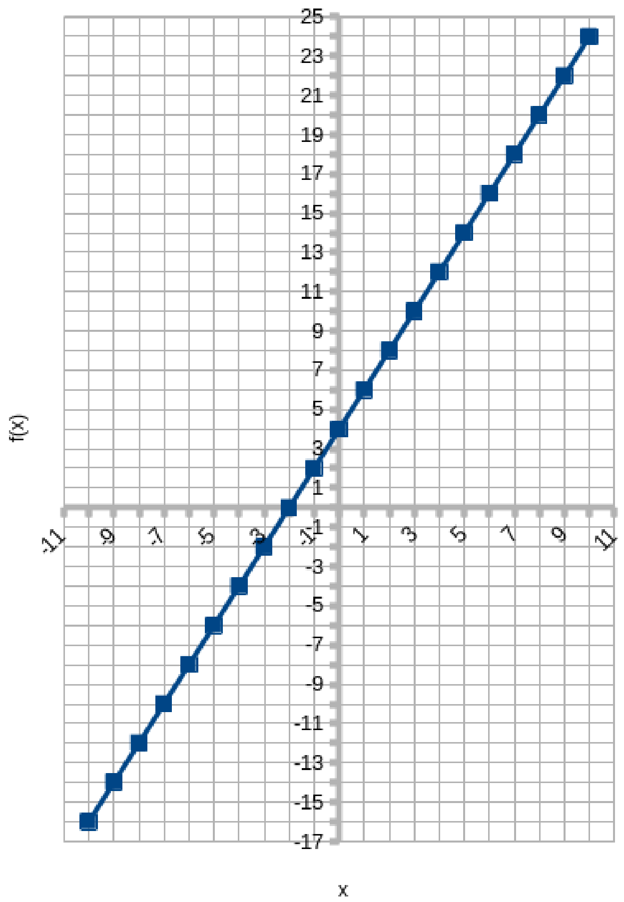

FIGURE 3 – La fonction linéaire ou affine $f(x) = 2.x + 4$

1. On utilise aussi le terme « linéaire », au sens strict, pour désigner la fonction de forme $f(x) = a.x$

4.3 Fonction inverse

La fonction donne l'inverse de la valeur ($\frac{1}{x}$).
La fonction inverse est donc de la forme :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x}$$

x	-10	-2	-1	-0,5	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,5	1	2	10
f(x)	-0,1	-0,5	-1	-2	-3,333	-5	-10	10	5	3,333	2	1	0,5	0,1

TABLE 4 – Les valeurs de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

La figure 4 donne la représentation graphique de cette fonction.

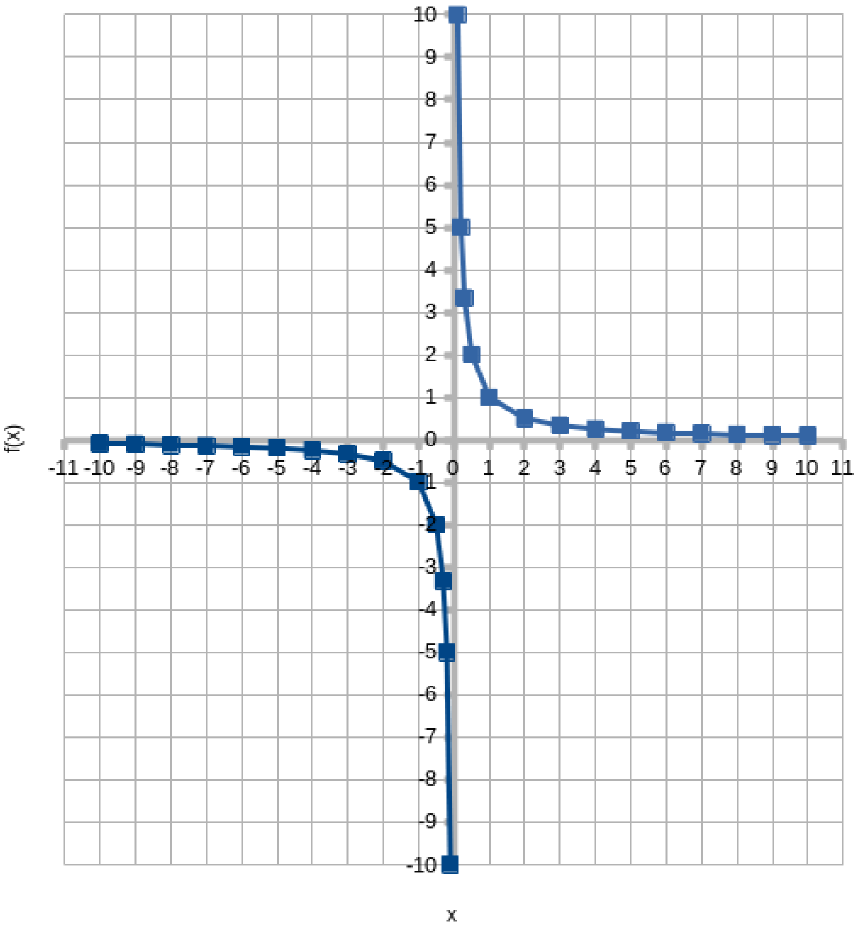

FIGURE 4 – La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$

4.4 Fonction carrée

La fonction carrée est de la forme :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36

TABLE 5 – Les valeurs de la fonction $f(x) = x^2$.

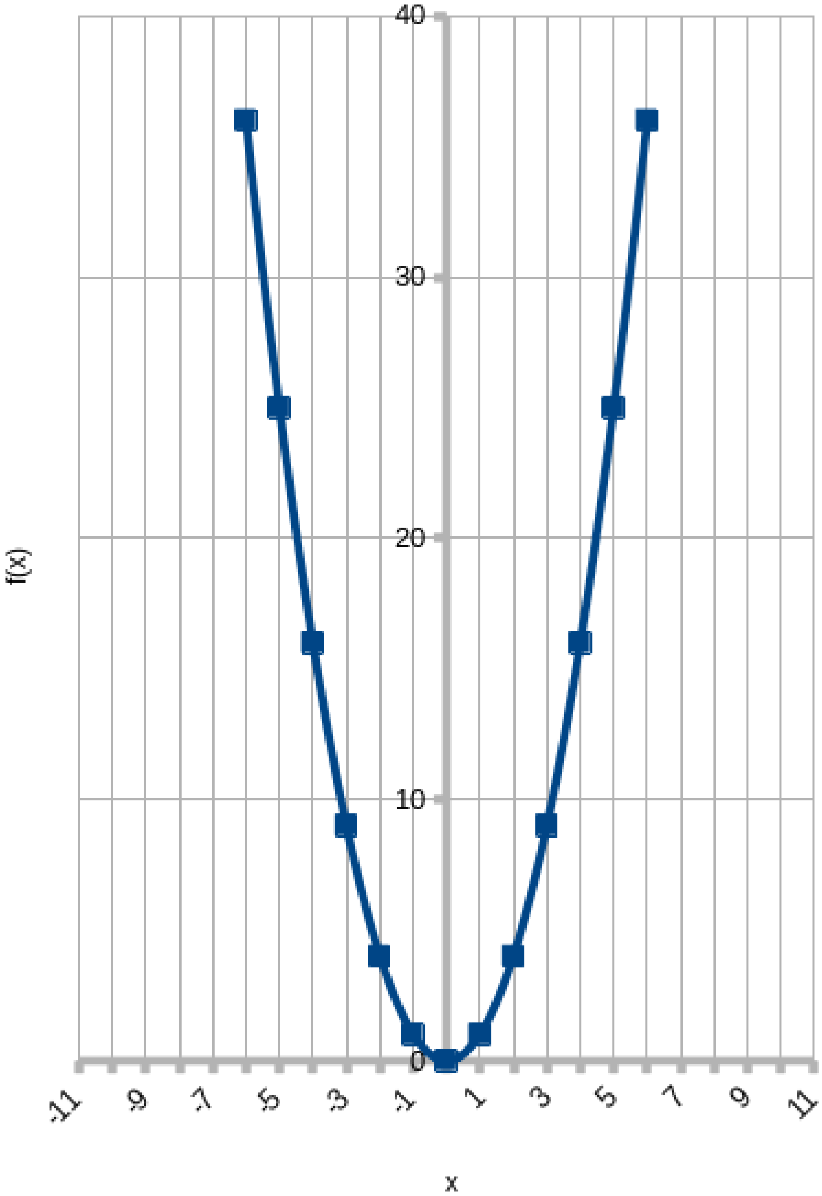

FIGURE 5 – La fonction carrée $f(x) = x^2$

4.5 Fonction cubique

La fonction cubique est de la forme

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^3$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64

TABLE 6 – Les valeurs de la fonction $f(x) = x^3$.

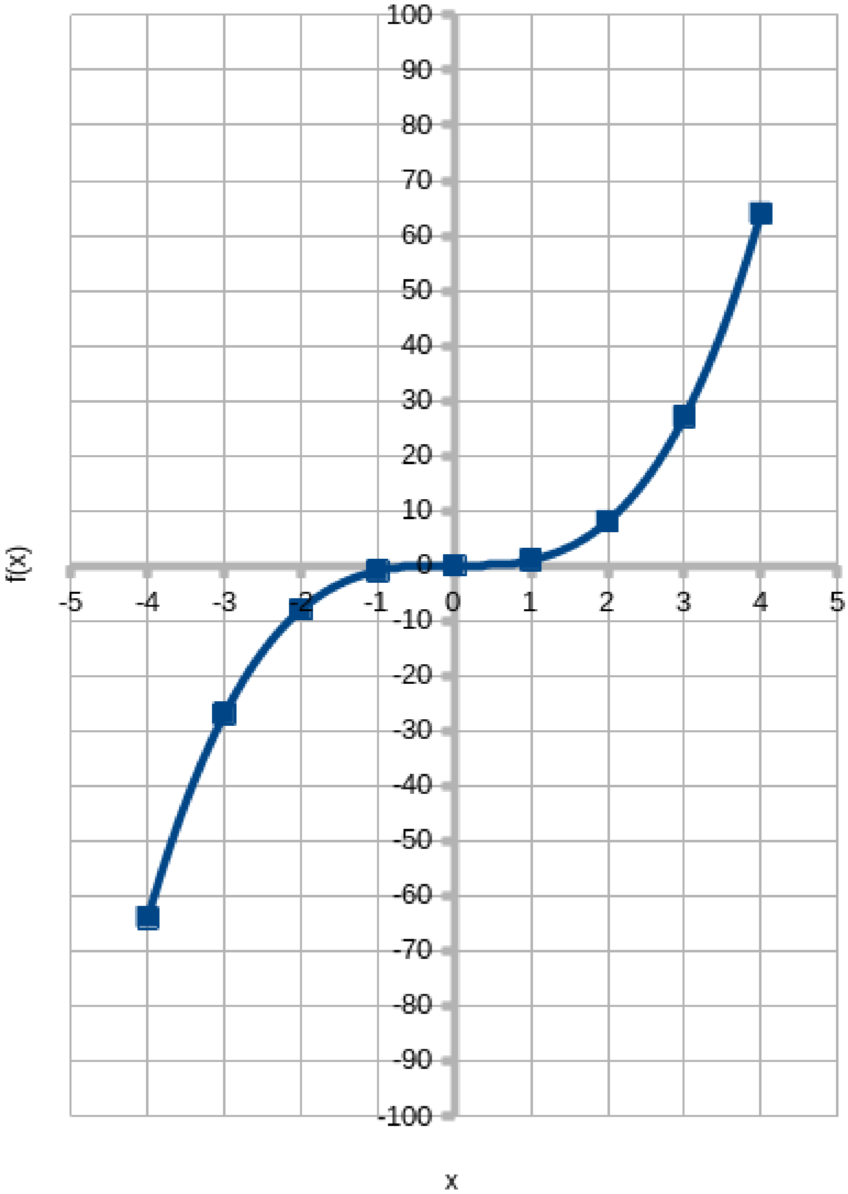

FIGURE 6 – La fonction linéaire ou affine $f(x) = x^3$

4.6 Fonction exponentielle en base 10

La fonction exponentielle en base 10 est de la forme

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 10^x$$

`x`	-3	-2	-1	0	1	2	3
`f(x)`	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

TABLE 7 – Les valeurs de la fonction $f(x) = 10^x$.

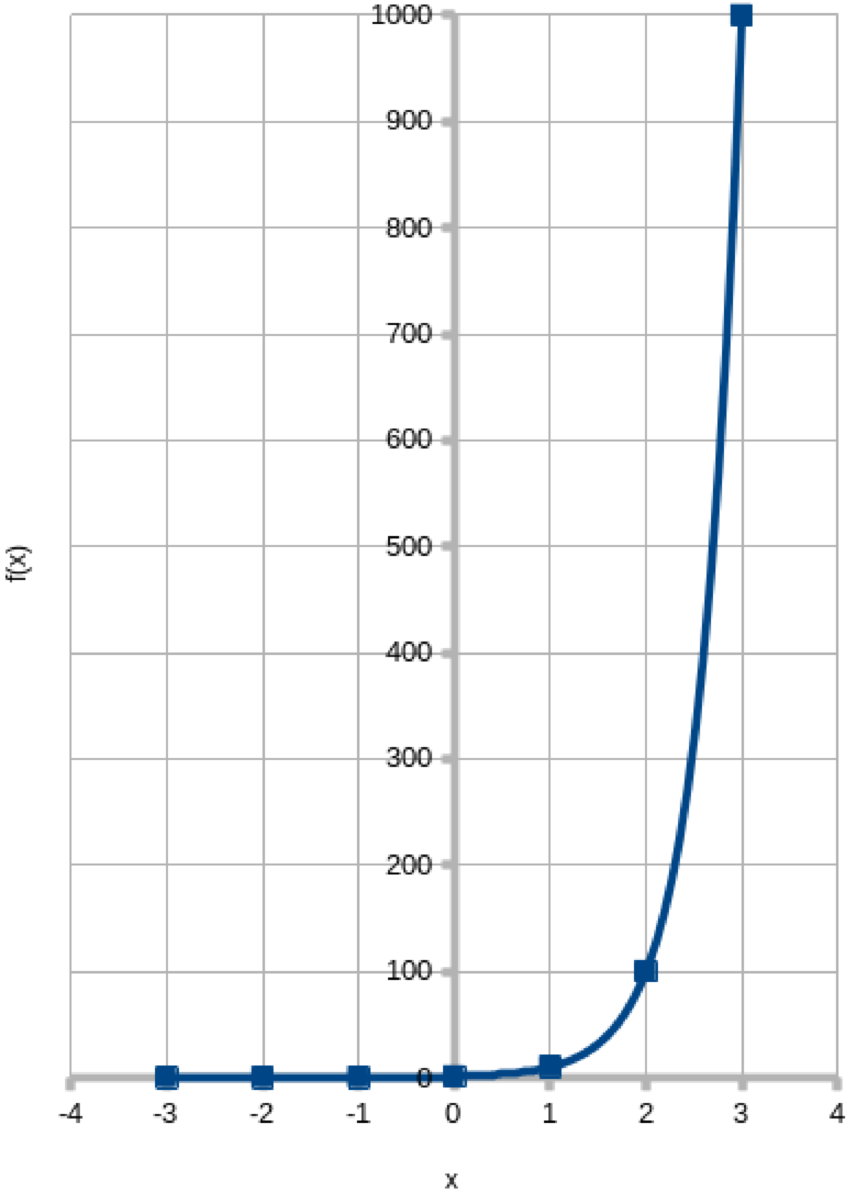

FIGURE 7 – La fonction exponentielle en base 10 $f(x) = 10^x$

4.7 Fonction logarithmique en base 10

La fonction logarithmique est la fonction inverse de la fonction exponentielle. En en base 10, elle est de la forme

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : f(x) = log_{10}(x)$$

x	1	10	100	1000
f(x)	0	1	2	3

TABLE 8 – Les valeurs de la fonction $f(x) = log_{10}(x)$.

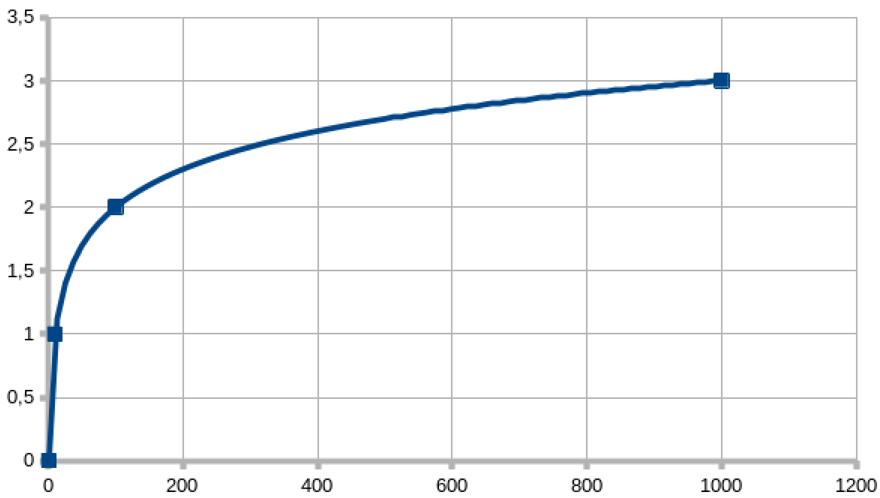

FIGURE 8 – La fonction exponentielle en base 10 $f(x) = 10^x$

5 Différentes caractéristiques des fonctions

5.1 Positivité, zéro et négativité d'une fonction

Une fonction est considérée comme **positive** dans un intervalle donné, si et seulement si, toutes les valeurs de la transformation (valeurs de la fonction) sont positives.

Une fonction est considérée comme **négative** dans un intervalle donné, si et seulement si, toutes les valeurs de la transformation sont négatives.

La (ou les) racine(s) correspond(ent) au point où la valeur de la fonction vaut zéro.

Par exemple, on peut dire que la fonction $[-10, 10] \rightarrow [-12, 8] : f(x) = x - 2$ est négative entre -10 et 2 ([-10,2[) et positive entre 2 et 10 (]2,10]). 2 est donc la racine de la fonction.

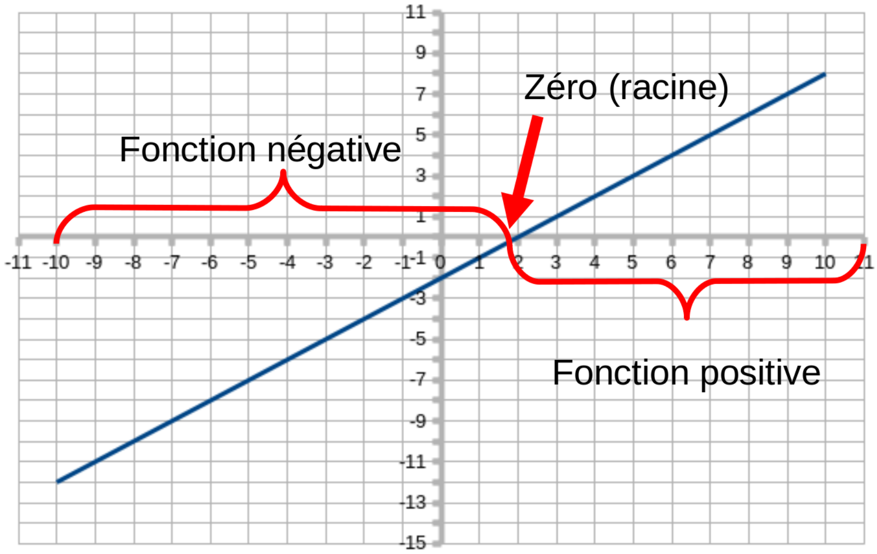

FIGURE 9 – Le signe de la fonction x-2

5.2 Croissance ou décroissance d'une fonction

Une fonction est **croissante**, si et seulement, la variation de valeur de la fonction est positive. Graphiquement, si en suivant l'axe des x, les valeurs de la fonction augmentent, alors la fonction est croissante dans l'intervalle.

Une fonction est **décroissante**, si et seulement, la variation de valeurs de la fonction est négative. Graphiquement, si en suivant l'axe des x, les valeurs de la fonction diminuent, alors la fonction est décroissante dans l'intervalle.

Dans le cas des fonctions affines ou linéaires, la fonction est soit croissante, soit décroissante en tous points. On utilise aussi le terme de **pente** pour désigner la croissance. La pente est donnée par la valeur du paramètre a (dans la transformation $f(x) = a.x + b$). Si a est positif, alors la fonction est croissante. Sa est négatif, alors la fonction est décroissante.

Par exemple, on peut dire que la fonction $[-2, 4] \rightarrow [-20, 16] : f(x) = x^3 - 3.x^2$ à une croissance positive entre -2 et 0 ([-2,0[), négative entre 0 et 2 (]0,2[) et enfin positive entre 2 et 4 (]2,4))

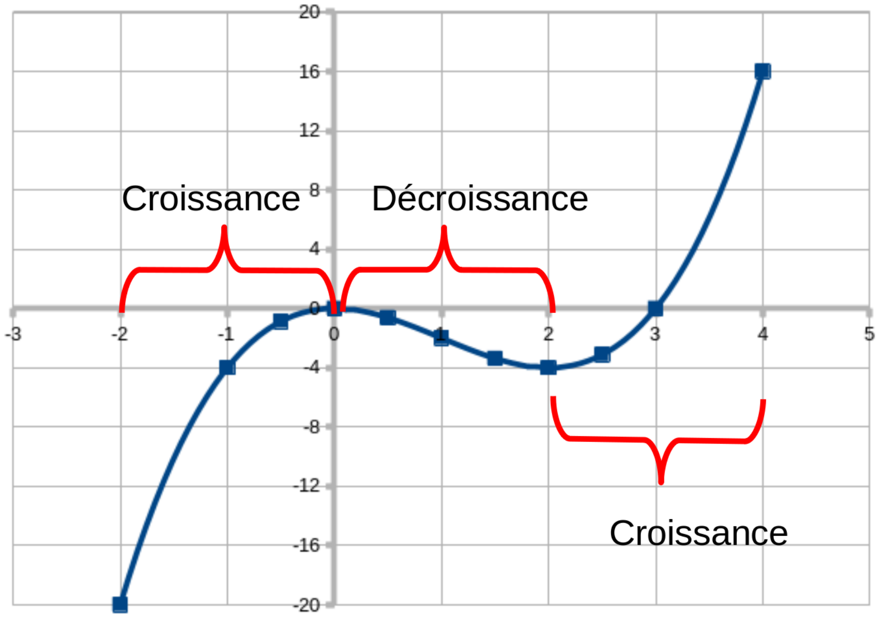

FIGURE 10 – La croissance de $x^3 + 3.x^2$

5.3 Extremums : maximums et minimums locaux

Un **maximum** est un couple de valeurs (un point x et f(x)) où la croissance vaut 0, mais où la fonction était croissante avant le point et décroissante après.

Un **minimum** est un couple de valeurs (x et f(x)) où la croissance vaut 0, mais où la fonction était décroissante avant le point et croissante après.

Par exemple, on peut dire que la fonction $[-3, 2] \to [0, 20] : f(x) = x^3 + 3x^2$ à un maximum local (-2,-4) et un minimum local au point (0,0).

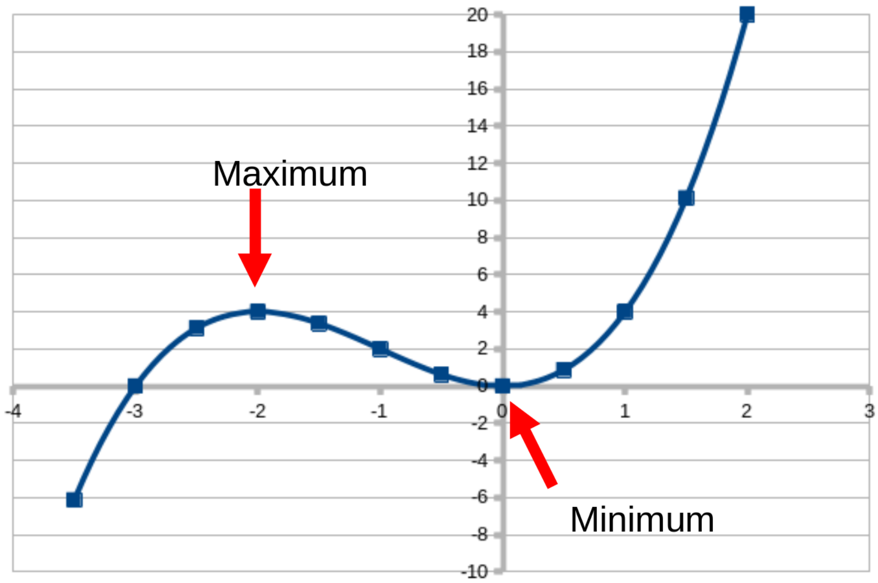

FIGURE 11 – Minimum et maximum de $x^3 + 3.x^2$

5.4 Analyse graphique d'une fonction

Soit la fonction $[-2, 4] \rightarrow [-16, 4]$: $f(x) = -x^3 + 3.x^2$:

x	-1	0	1	2	3	4
f(x)	4	0	2	4	0	-16
Valeur	+	0	+	+	0	-
Croissance	↘	—	↗	—	↘	↘
Extremum		minimum		maximum		-

Table 9 – Les valeurs de la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$.

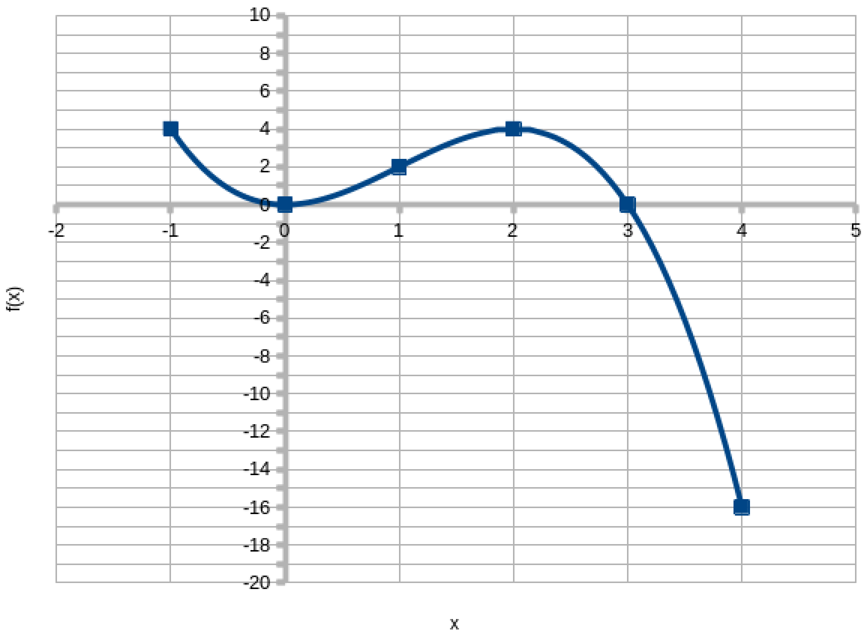

Figure 12 – La fonction $-x^3 + 3x^2$

5.5 Intersections et comparaisons

5.5.1 Intersection de fonctions

Deux fonctions peuvent se croiser en un point. Ce point de croisement correspond à l'égalité d'un fonction. S'il s'agit de deux fonctions linéaires, on peut résoudre l'égalité de fonctions.

Par exemple, $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -x + 2$,

$$f(x) = g(x)$$

$$2x - 1 = -x + 2$$

$$2x + x = 1 + 2$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Les deux fonctions se croisent donc quand x est égal à 1.

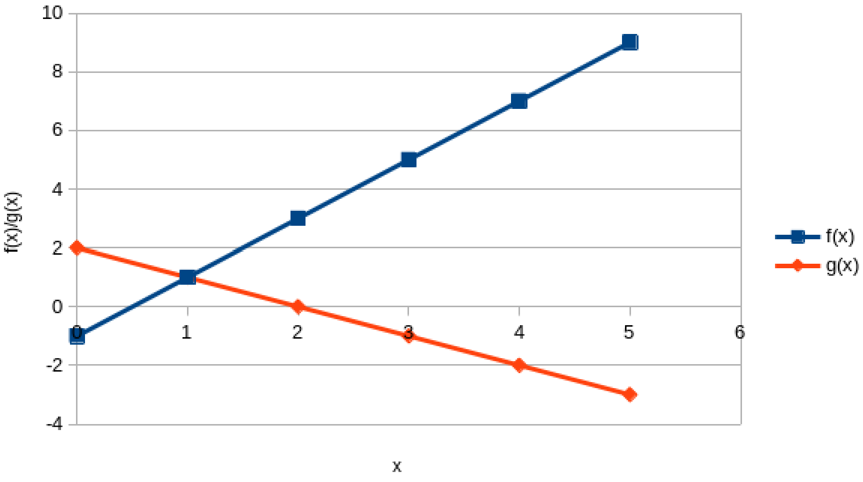

FIGURE 13 – Intersection de f(x) et g(x)

5.5.2 Comparaison de fonctions

Par une approche purement graphiquement, on peut comparer deux fonctions à chaque valeur de x et déterminer si une fonction dans un intervalle donné est supérieure ou inférieure à une autre fonction.

Par exemple, on peut utiliser deux fonctions :

— $[-2, 3] \to [-0, 75, 13]$: $f(x) = x^2 + x + 1$;

— $[-2, 3] \to [1, 13]$: $g(x) = x^2 + 1$.

On remarque que :

— entre -2 et 0 [-2, 0[, g(x) > f(x) ;

— à 0, g(x) = f(x)=1 ;

— entre 0 et 3]0, 3], f(x) > g(x) ;

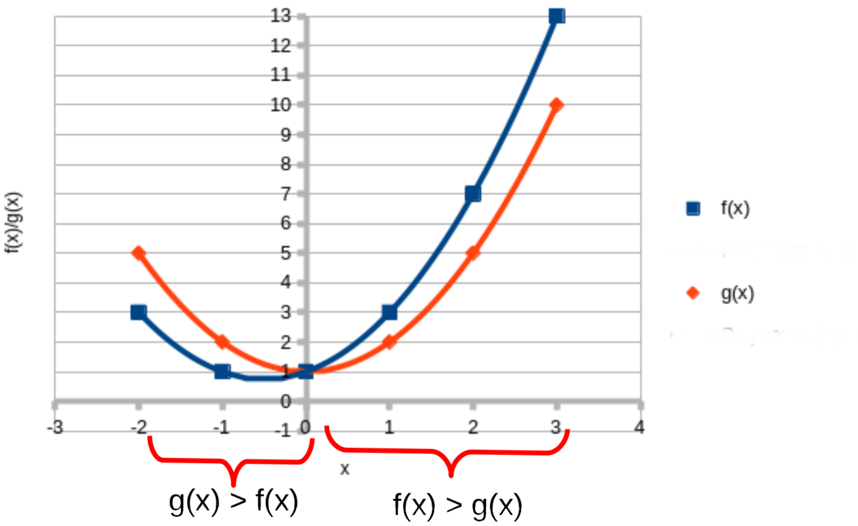

FIGURE 14 – Comparaison de f(x) et g(x)

Table des matières